宮城学院女子大学発達科学研究
2021. 21. 11-21

算数・数学における教材の発展的な扱いについて
—平行線の作図を例に—

中　込　雄　治[1]
黒　木　伸　明[2]

算数・数学の学習においては、既習事項を関連付けて新たな課題を解決していくという学習がなされている。しかし、1つの解決法が定着すると、関連する新たな知識や方法が獲得されても、その課題が見直されることは少ない。ここでは解決した課題をその後も学習段階に応じて繰り返し見直すことによって、算数・数学の教材を小学校中学校を通して発展的に扱うことができ、多くの既習事項を関連付けて多様な解決法を見出すことができるようになることを明らかにした。見直す教材として、平行線の作図方法を取り上げ、小中のそれぞれの学習段階に応じて、既習事項を関連付けて体系化する活動が可能になることを具体的に示した。

Keywords：教材の発展的な扱い、平行線の作図、小中を一貫した教材、既習事項の関連付け

1. 教材の発展的な扱いとは

算数・数学の学習において、未習の課題を解決しようとするとき、既習事項を関連付けるという手法をとる。例えば、「垂線の作図」は小4の単元「垂直・平行と四角形」の前半において「点Aを通って、直線㋐に垂直な直線の作図」として登場する[1)]。

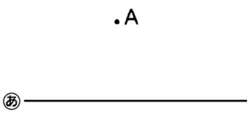


図1

これを解決するために、小4の単元「角の大きさ」で学んだ次のことを用いる。

【算数教科書にある三角定規の角度】
三角定規には直角がある[2)]。

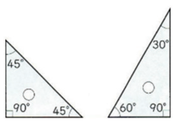


図2

三角定規を用いた作図は次の手順による[3)]。

【算数教科書にある垂線の作図】
［1］図3のように、直線に三角定規①を合わせ、三角定規②を三角定規①に合わせて直角をつくる。
［2］図4のように、三角定規②を点Aに合うように動かし、押さえながら直線をかく。

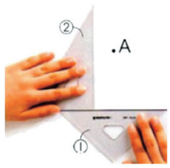


図3

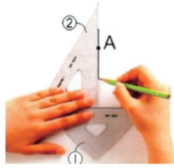


図4

この方法によって垂線の作図方法は解決済みとなる。しかし、学習が進むにつれて既習事項も増えてくるので、すでに解決済みの課題においても、再度見直すことにより、新しい解決方法を見出すことができるようになる。例えば、同単元の後半において、ひし形の作図方法とひし形の対角線の交わり方について、次のように学習する。

【算数教科書にあるひし形の作図】
半径の等しい円を2つかき、交わった点と円の中心を直線で結ぶとひし形ができる[4)]。

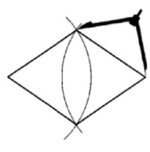


図5

【算数教科書にあるひし形の対角線】
ひし形の2本の対角線は、互いの中点で垂直に交

---

1. 宮城学院女子大学教育学部
2. 上越教育大学名誉教授

わる[5]。

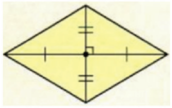


図6

また、小3の単元「円と球」において、円の半径に関して次のことを学習している。

【算数教科書にある円の半径】

1つの円では半径はすべて同じ長さである[6]。

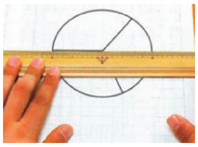


図7

そこで、これら【算数教科書にあるひし形の作図】【算数教科書にあるひし形の対角線】【算数教科書にある円の半径】を既習事項として押さえ、再度垂線の作図を見直すと、次のような新しい解決方法を見出すことができる。

【垂線の作図（三角定規を使わない方法)】

定点Aを通り、直線mに垂直な直線を作図する。

[1] 図8のように、点Aを中心に任意の半径で円をかき、直線mとの交点をB, Cとする。

[2] 図9のように、点B, Cを中心に半径ABの円をかき、2円の交点A, Dを結ぶ。

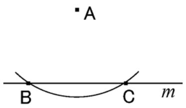


図8

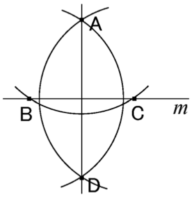
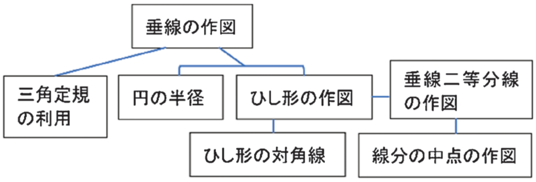


図9

ここでは、ひし形ABDCを想定することにより、ひし形の対角線が垂直に交わることから、直線mへの垂線となる直線ADを作図している。また、このときひし形の対角線は互いに他を二等分することから、直線ADの作図は、線分BCの【垂直二等分線の作図】にもなっており、さらに【線分の中点の作図】にもつながっていると言える。これらのことから、垂線の作図を基にして、関連図1のような既習事項の関連を見出すことができる。



関連図1

以上のように、すでに解決済みの課題を再度見直して発展的に扱うことによって、新しい解決方法を見出すことができ、既習事項を関連付けて体系化することができる。本稿では、「平行線の作図」に着目し、教材を発展的に扱うことによって、小中を通して学習段階に応じて多様な解決方法が見出されることを明らかにするとともに、その過程で得られた知見を示す。

2. 既習事項を関連付けるために

まず、「平行線の作図」と関連のある事柄を押さえていく。

(1) 平行の定義について

平行の定義は小学校と中学校で異なっている。小学校の算数では、「1本の直線に垂直な2本の直線は平行である」と定義しており、中学校の数学では「平面上の交わらない2直線は平行である」と定義している[7)8)]。一般に「同位角が等しければ2直線は平行である」と言えるが、小学校の定義はこの特殊な場合になっている。

(2) 算数教科書にある平行線の作図

平行線の作図は、小4の単元「垂直・平行と四角形」において「点Aを通って、直線㋐に平行な直線の作図」として登場する[9]。

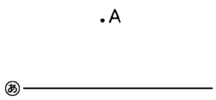


図10

小学校での定義に基づき、平行線の作図は、三角定規を用いて次のように行われている[10]。

【算数教科書にある平行線の作図その1】

[1] 図11のように、直線に三角定規②を合わせ、三角定規①を三角定規②に合わせて直角をつくる。

[2] 図12のように、三角定規②を点Aに合うように動かし、押さえながら直線をかく。

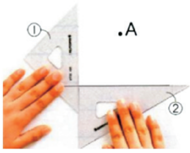


図11

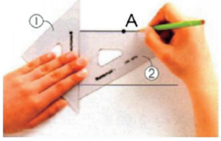


図12

これは「1本の直線に垂直な2本の直線は平行である」ことを基にした、三角定規をずらした作図方法であるが、これで解決済みとせず、関連する新たな知識や方法を獲得した場合を想定して、それらを用いて再度平行線の作図方法の見直しを図る。そこで、関連する知識や方法を検討するため、「平行」という共通概念を含むものと、四角形の対角線の特徴に注目する。

(3)「平行」を共通概念として含むもの

ここでは、「平行」という概念と関わりのある様々な事柄に注目してみる。この「平行」を共通概念として含むものをいかに多く見つけるかが、多様な解決法を見出すことにつながっていく。「平行」を共通概念として含むものとしては、例えば以下のような項目が考えられる。(なお、ここでは長方形、正方形、平行四辺形、ひし形をあえて区別している。)

・1本の直線に垂直な2直線(小4)
・同位角が等しい2直線(小4)
・錯角が等しい2直線(中2)
・幅が一定の2直線(小4)
・長方形の対辺(小4)
・正方形の対辺(小4)
・平行四辺形の対辺(小4)
・ひし形の対辺(小4)
・台形の上底と下底(小4)
・頂点共有の相似な三角形の対応辺(小6)
・中点連結定理(中3)　など

(4)　四角形の対角線の特徴

四角形の対角線の特徴は、四角形自体を作図するときに役立つ情報となる。算数教科書でも次のような表を使い、既習の四角形における対角線の特徴を確認している[11]。対角線の特徴から該当する図形が決定できることは、「三角形の合同」を用いて証明することができる。

表1

四角形の名前／四角形の対角線の特ちょう	台形	平行四辺形	ひし形	長方形	正方形
(1) 2本の対角線の長さが等しい				○	○
(2) 2本の対角線がそれぞれの真ん中の点で交わる		○	○	○	○
(3) 2本の対角線が垂直である			○		○

3.　平行線の多様な作図方法

前述の平行の定義、「平行」を共通概念として含むもの、四角形の対角線の特徴などを基にして、平行線の多様な作図方法を見出していく。

(1)　定義に基づいた作図

ここでは、「1本の直線に垂直な2本の直線は平行である」という定義に基づき、定規とコンパスを使った作図方法を考える。「垂線の作図」は、前述した方法の他に、中1の単元「平面図形」の基本作図のところでも、図13のように「2円の中心A, Bを結んだ直線と、2円の交点を結んだ直線が垂直に交わる」ことを基にした作図や、図14のように「直線上の点Oを中心に円をかき、さらに円と直線の交点C, Dを中心に円弧をかくと、その交点Eと点Oを結ぶ直線と直線ABが垂直に交わる」ことを基にした作図を学習する[12,13]。

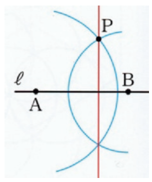


図13

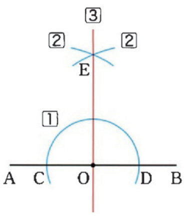
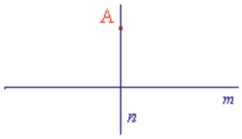


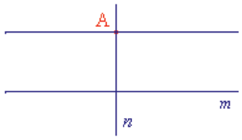
図14

これらを既習とすると、次のような方法が考えられる。

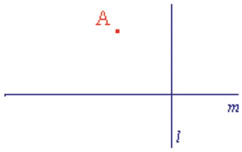
【垂線その1】
①点Aを通り直線mに垂直な直線nを引く.



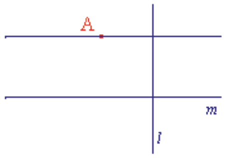
②点Aを通り直線nに垂直な直線を引く.



【垂線その2】
①直線mに垂直な任意の直線lを引く.



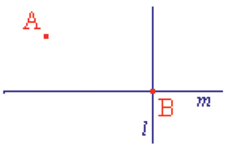
②点Aを通り直線lに垂直な直線を引く.



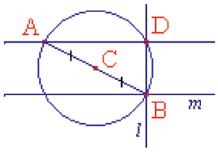
【垂線その2】の任意の直線が点Aを通った場合が【垂線その1】と考えると、【垂線その1】と【垂線その2】は特殊と一般の関係にあると言える。作図過程では、この【垂線その2】のように「任意の」というニュアンスを含んだ、一般化された図形を想定することが多い。

また、「垂線の作図」においては、中3の単元「円」のところで学習する「円の直径に対する円周角は直角である」ことを用いると、次のような方法も考えられる[14)]。

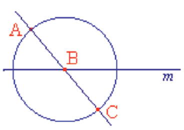
【垂線その3】
①直線mに垂直な任意の直線lを引く.



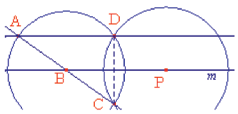
②ABの中点Cを中心に半径ACの円をかき，直線lとの交点Dと点Aを結ぶ.



【垂線その4】
①点Aを通る任意の直線を引き,点Bを中心に半径ABの円をかく.



②直線m上の任意の点Pを中心に半径PCの円をかき，円Bとの交点Dと点Aを結ぶ.



(2)「平行」を共通概念にもつ四角形の活用

1)【長方形を活用した作図】

小4の単元「垂直・平行と四角形」に、次のような長方形の作図が出ている[15)]。

【算数教科書にある長方形の作図】

[1] 図15のように、辺BCを決め、その両端に垂直な直線をかき、AB＝CDとなる点A, Dをとる。

[2] 図16のように、点Aと点Dを結ぶ。

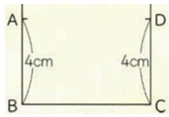


図15

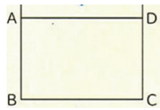
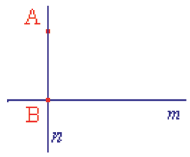


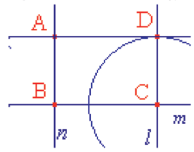
図16

この作図方法を基にすると、次のような方法が考えられる。

【長方形その1】
①点Aを通り直線mに垂直な直線nを引く.

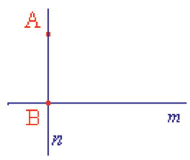


②直線mに垂直な任意の直線lを引き，点Cを中心に半径ABの円をかき,直線lとの交点Dと点Aを結ぶ.

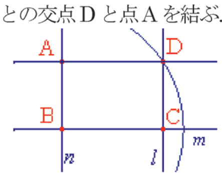


【長方形その1】での点Dの決め方において、長方形の「2本の対角線の長さは等しい」や「2本の対角線はそれぞれの中点で交わる」を既習とすれば、次のような方法も考えられる。

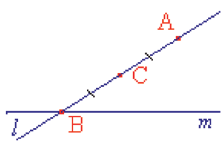
【長方形その2】
①点Aを通り直線mに垂直な直線nを引く.



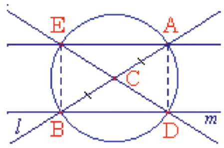
②直線mに垂直な任意の直線lを引き，点Bを中心に半径ACの円をかき，直線lとの交点Dと点Aを結ぶ.



【長方形その3】
①点Aを通る任意の直線lを引き，線分ABの中点をCとする.



②点Cを中心に半径ACの円をかき，直線DCとの交点Eと点Aを結ぶ.



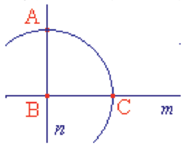
【長方形その3】は、前述の「円の直径に対する円周角は直角である」を活用した作図と捉えることもできる。

2)【正方形を活用した作図】

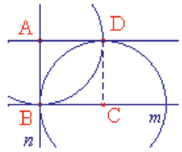
正方形を活用した作図としては、次のような方法が考えられる。

【正方形その1】

①点Aを通り直線mに垂直な直線nを引き，点Bを中心に半径ABの円をかく.



②点A,Cを中心に半径ABの円をかき，その交点Dと点Aを結ぶ.



3)【平行四辺形を活用した作図】

小4の単元「垂直・平行と四角形」に、平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しくなっていることを用いた、次のような作図が出ている[16]。

【算数教科書にある平行四辺形の作図】

[1] 図17のように、3点A,B,Cを決め、点Cを中心に半径ABの円弧をかく。

[2] 図18のように、点Aを中心に半径BCの円弧をかき、2つの円弧の交点と点A,Cを結ぶ。

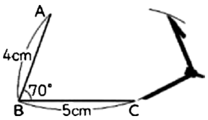


図17

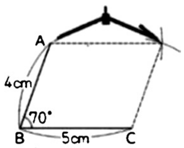
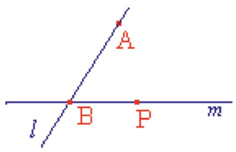


図18

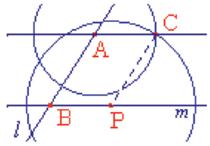
この作図方法を基にすると、次のような方法が考えられる。

【平行四辺形その1】

①点Aを通る任意の直線lを引き，直線m上に任意の点Pをとる.



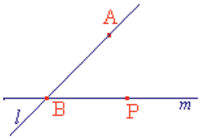
②点A,Pを中心に半径がそれぞれBP,ABの円をかき，その交点Cと点Aを結ぶ.



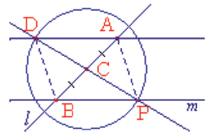
平行四辺形の「2本の対角線はそれぞれの中点で交わる」ことと、「線分の中点の作図」を既習とすれば、次のような方法も考えられる。

【平行四辺形その2】

①点Aを通る任意の直線lを引き，直線m上に任意の点Pをとる.



②ABの中点Cを中心に半径CPの円をかき，直線CPとの交点Dと点Aを結ぶ.



4)【ひし形を活用した作図】

小4の単元「垂直・平行と四角形」に、ひし形の4つの辺の長さがすべて等しいことを用いた、次のような作図が出ている[17]。

【算数教科書にあるひし形の作図】

[1] 図19のように、AB＝BCとなる3点A,B,Cを決める。

[2] 点A,Cを中心に半径ABの円弧をかき、2つの円弧の交点Dと点A,Cを結ぶ。

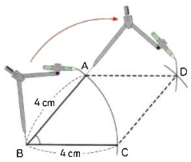
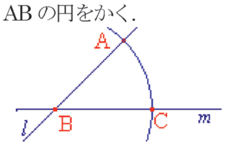


図19

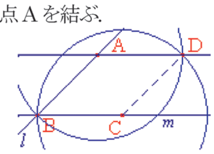
この作図方法を基にすると、次のような方法が考えられる。

【ひし形その1】

①点Aを通る任意の直線lを引き，点Bを中心に半径ABの円をかく.



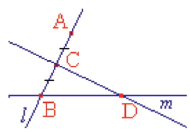
②点A,Cを中心に半径ABの円をかき，その交点Dと点Aを結ぶ.



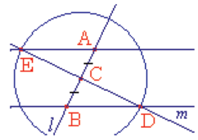
ひし形の「2本の対角線はそれぞれの中点で交わる」ことと、「垂直二等分線の作図」を既習とすれば、次のような方法も考えられる。

【ひし形その2】

①点Aを通る任意の直線lを引き，線分ABの垂直二等分線をひく.

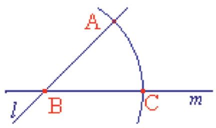


②点Cを中心に半径CDの円をかき，直線CDとの交点Eと点Aを結ぶ.

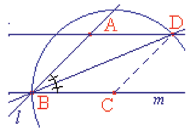


中1の単元「平面図形」の基本作図のところで学習する「角の二等分線の作図」を既習とすると、次のような方法も考えられる[18]。

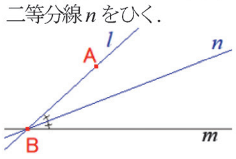
【ひし形その3】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，点 B を中心に半径 AB の円をかく．



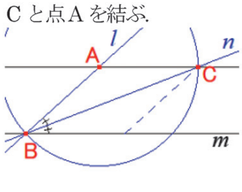
②点 C を中心に半径 AB の円をかき，∠ABC の二等分線との交点 D と点 A を結ぶ．



【ひし形その4】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，直線 m となす角の二等分線 n をひく．



②点 A を中心に半径 AB の円をかき，直線 n との交点 C と点 A を結ぶ．



5)【等脚台形を活用した作図】

中2の単元「三角形と四角形」において、図20のように等脚台形を二等辺三角形の一部とみて、AB＝DC であることを確認している[19]。

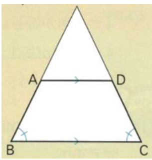
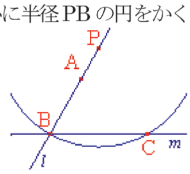


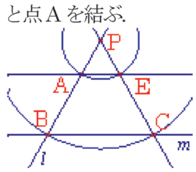
図20

これを基にすると、次のような方法も考えられる。

【等脚台形その1】
①点 A を通る任意の直線 l 上にとった任意の点 P を中心に半径 PB の円をかく．



②点 P を中心に半径 PA の円をかき，直線 CP との交点 E と点 A を結ぶ．



6)【中点連結定理を活用した作図】

中3の単元「相似な図形」において、中点連結定理を学習する[20]。図21の△ABC において、MN// BC，2MN＝BC となる。

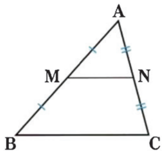
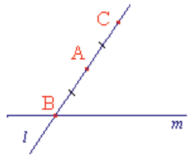


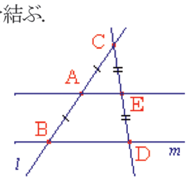
図21

中点連結定理と「線分の中点の作図」を既習とすると、次のような方法が考えられる。

【中点連結定理その1】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，AC=AB となる点 C をとる．

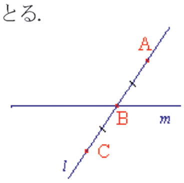


②点 C を通る任意の直線を引き，CD の中点 E と点 A を結ぶ．

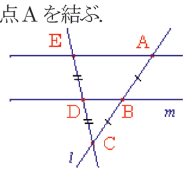


「線分の中点の作図」を使わない、次のような方法も考えられる。

【中点連結定理その2】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，BC=AB となる点 C をとる．

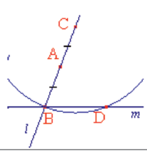


②点 C を通る任意の直線を引き，DE=CD となる点 E と点 A を結ぶ．

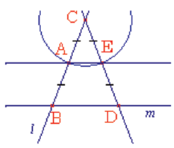


これらは一般の三角形を想定した作図であったが、二等辺三角形という特殊な三角形の作図でも成り立つので、次のような方法も考えられる。

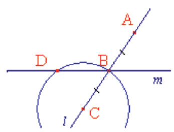
【中点連結定理その3】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，AC=AB となる点 C を中心に半径 CB の円をかく．



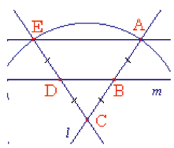
②点 C を中心に半径 CA の円をかき，直線 CD との交点 E と点 A を結ぶ．



【中点連結定理その4】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，BC=AB となる点 C を中心に半径 CB の円をかく．



②点 C を中心に半径 CA の円をかき，直線 CD との交点 E と点 A を結ぶ．



7)【合同な三角形を活用した作図】

小4の単元「垂直・平行と四角形」では、平行線は幅が一定であることを学習している[21)]。

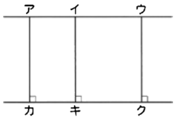


図22

また、前述の【算数教科書にある長方形の作図】で、2直線の幅は2箇所の確認で決まることも押さえている。そこで、幅を三角形の高さに見立てる。小5の単元「合同な図形」に、三辺相等の合同な三角形の作図が、次のように出ている[22)]。

【算数教科書にある合同な三角形の作図】

3辺が8 cm、5 cm、7 cmの三角形をかく。

[1] 図23のように、8 cmの辺BCを決め、点Bを中心に半径5 cmの円弧をかく。

[2] 図24のように、点Cを中心に半径7 cmの円弧をかき、2つの円弧の交点と点B,Cを結ぶ。

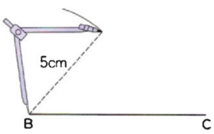


図23

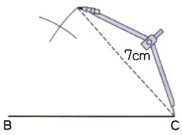


図24

また、小5の単元「面積」において、三角形の頂点から底辺に垂直に引いた直線の長さ（図25のAD）を三角形の高さというと学習する[23)]。

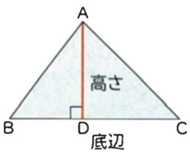
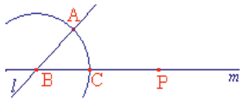


図25

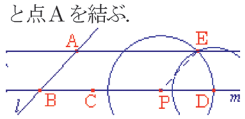
これらを既習とすると、合同な三角形の高さが等しいことを用いた次のような方法が考えられる。

【合同な三角形その1】

①点 A を通る任意の直線 l を引き，点 B を中心に半径 AB の円をかく．直線 m 上に任意の点 P をとる．



②点 P を中心に半径 AB の円をかき，点 D を中心に半径 AC の円をかく．交点 E と点 A を結ぶ．



【合同な三角形その1】では、二等辺三角形ABCと合同な三角形EPDをかき、頂点A,Eから底辺BC，PDまでの高さが等しいことから2点A,Eを結び、平行線を作図している。（直線AEと直線mの幅は一定になっている。）

この【合同な三角形その1】は別の観点から捉えることもできる。小4の単元「垂直・平行と四角形」には、同位角が等しい2直線は平行であることを基にした、次のような三角定規を用いた平行線の作図が出ている[24)]。

【算数教科書にある平行線の作図その2】

[1] 図26のように、直線に三角定規を合わせて押さえ、左側の三角定規を合わせる。

[2] 図27のように、右側の三角定規を点Aに合うように動かし、押さえながら直線をかく。

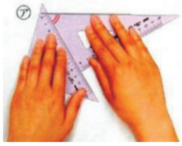


図26

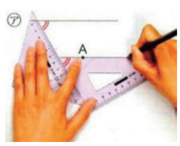


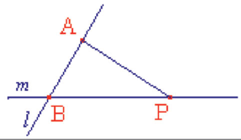
図27

また、小5では合同な三角形の対応する角の大きさが等しいことを学習する。さらに、中2の単元「三角形と四角形」では、平行四辺形になるための条件「1組の辺が平行でその長さが等しい」を学習する[25)]。これらのことを既習とすると、【合同な三角形その1】は、AB//EP（∵∠ABC＝∠EPD），AB＝EPとなる作図でもあるから、平行四辺形ABPEを作図していると捉えることもできる。

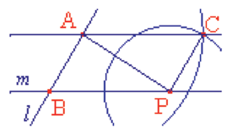
小5の単元「合同な図形」では、平行四辺形を1本の対角線で2つの三角形に分けると、それらは合同になることも学習している[26)]。これを既習とすると、次のような方法が考えられる。

【合同な三角形その2】

①点 A を通る任意の直線 l を引き，直線 m 上に任意の点 P をとる．



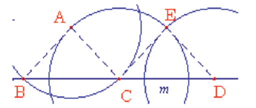
②点 A,P を中心に半径がそれぞれ BP, AB の円をかき，その交点 C と点 A と結ぶ．



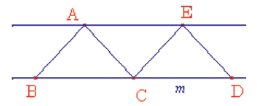
【合同な三角形その2】では、対角線で分けられた合同な三角形の作図を行っているが、手順は結果として【平行四辺形その1】と同じになる。（基になるアイデアが違うので別の作図として扱う。）【合同な三角形その1】【合同な三角形その2】に

おいて、三角形を特殊化して二等辺三角形にすると、次のような方法も考えられる。

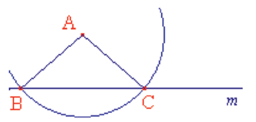
【合同な三角形その3】
①点Aを中心に任意の円をかき，CD=BCとなる点Dをとり，点C,Dを中心に半径ABの円をかく．



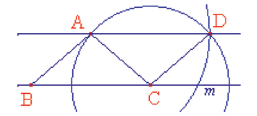
②点Aと点Eを結ぶ．



【合同な三角形その4】
①点Aを中心に任意の円をかく．



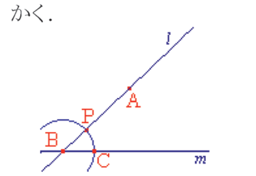
②点A,Cを中心にそれぞれ半径がBC,ACの円をかき，点Aと点Dを結ぶ



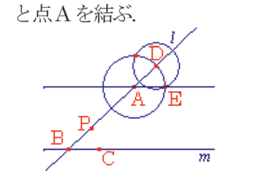
8)【同位角・錯角を活用した作図】

同位角を用いた三角定規による平行線の作図は、前述のように小4で学習する。そこで、同位角が等しい2直線は平行であることを基に、合同な二等辺三角形を用いた次のような方法が考えられる。

【同位角その1】
①点Aを通る任意の直線 l 上に任意の点Pをとり，点Bを中心に半径BPの円をかく．



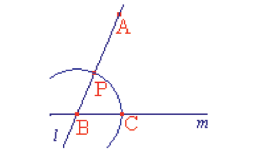
②点Aを中心に半径BPの円をかき，点Dを中心に半径PCの円をかく．交点Eと点Aを結ぶ．



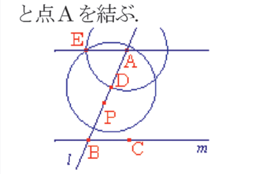
【同位角その1】では、同じ大きさの角を作図するために合同な三角形の作図方法を活用している。

錯角が等しければ平行であることは、中2の単元「平行と合同」で学習する[27]。これを既習とすると、次のような方法も考えられる。

【錯角その1】
①点Aを通る任意の直線 l 上に任意の点Pをとり，点Bを中心に半径BPの円をかく．



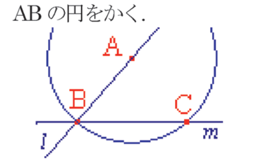
②点Aを中心に半径BPの円をかき，点Dを中心に半径PCの円をかく．交点Eと点Aを結ぶ．



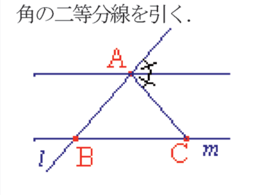
前述の【ひし形その4】も、錯角を用いた作図方法と捉えることができる。

また、中1の単元「平面図形」の基本作図のところで学習する「角の二等分線の作図」を既習とすると、次のような作図も考えられる。

【同位角・錯角その2】
①点Aを通る任意の直線 l を引き，点Aを中心に半径ABの円をかく．



②二等辺三角形ABCの外角の二等分線を引く．



9)【相似な三角形を活用した作図】

小6の単元「図形の拡大と縮小」に、三角形の拡大図の作図が、次のように出ている[28]。

【算数教科書にある三角形の拡大図の作図】

△ABCの2倍の拡大図をかく。

[1] 図28のように、直線BA上にAG＝ABとなる点Gをとる。

[2] 直線BC上にCH＝BCとなる点Hをとると、△GBHが△ABCの2倍の拡大図になる。

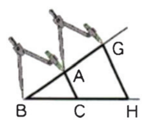
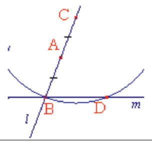


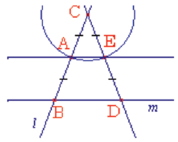
図28

このとき、△ABC∽△GBHであることから、∠BAC＝∠BGHより、AC//GHとなる。こうした相似な三角形の作図を既習とすると、二等辺三角形を2分の1に縮小する作図を用いた、次のような方法が考えられる。

【相似な三角形その1】
①点 A を通る任意の直線 l を引き, AC=AB となる点 C を中心に半径 CB の円をかく.



②点 C を中心に半径 CA の円をかき, 直線 CD との交点 E と点 A を結ぶ.



【相似な三角形その1】では、二等辺三角形CBDを想定し、それを2分の1に縮小した二等辺三角形CAEを作っている。手順は結果として【中点連結定理その3】と同じになる。

また、中3の単元「相似と図形」において、次のような三角形と比の関係を学習する[29]。図29のように、△ABCにおいて、AD：DB＝AE：ECならば、DE//BCとなる。

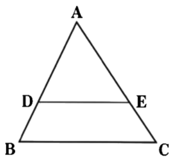
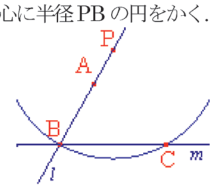


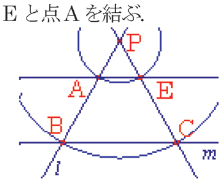
図29

これを既習とすると、相似な二等辺三角形を用いた、次のような方法が考えられる。

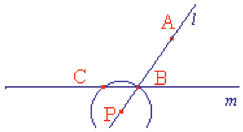
【相似な三角形その2】
①点 A を通る任意の直線 l 上にとった任意の点 P を中心に半径 PB の円をかく.



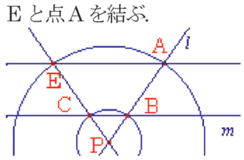
②点 P を中心に半径 PA の円をかき, 直線 CP との交点 E と点 A を結ぶ.



【相似な三角形その3】
①点 A を通る任意の直線 l 上にとった任意の点 P を中心に半径 PB の円をかく.



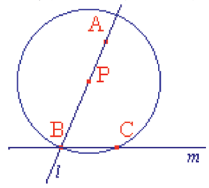
②点 P を中心に半径 PA の円をかき, 直線 CP との交点 E と点 A を結ぶ.



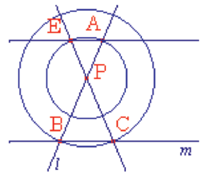
【相似な三角形その2】は【相似な三角形その1】を一般化した作図と捉えることができる。また、【相似な三角形その2】の手順は結果として【等脚台形その1】と同じになる。

さらに、相似な三角形の作図方法を広く捉えると、次のような方法も考えられる。

【相似な三角形その4】
①点 A を通る任意の直線 l 上にとった任意の点 P を中心に半径 PB の円をかく.



②点 P を中心に半径 PA の円をかき, 直線 CP との交点 E と点 A を結ぶ.



10)【三角形の重心を活用した作図】

高1（数学A）の単元「図形の性質」において、三角形の重心が中線を2：1に内分することを学習する[30]。図30のように、△ABCの重心をGとすると、AG：GM＝BG：GN＝CG：GL＝2：1となる。

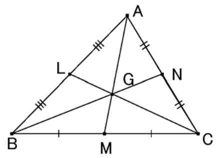
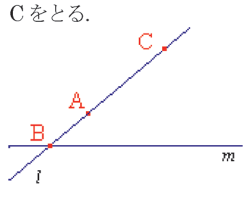


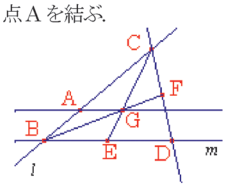
図30

これを既習とすると、前述の三角形と比の関係を用いた、次のような方法が考えられる。

【三角形の重心その1】
①点 A を通る任意の直線 l を引き, AC=2AB となる点 C をとる.



②点 C を通る任意の直線を引き, BD,CD の中点を E,F とし, BF と CE の交点 G と点 A を結ぶ.



この【三角形の重心その1】では、△CBEにおいて、CA：AB＝CG：GE（＝2：1）となっているので、AG//BEとなる。

11)【三角形の中線を活用した作図】

三角形の中線を活用すると、次のように平行線を引くことができる。図31のように、△ABCの中線AM上に任意の点Nをとると、PQ//BCとなる[31]。

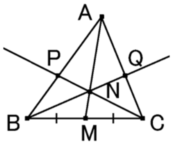
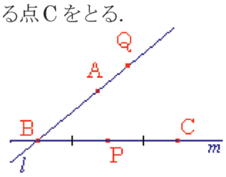


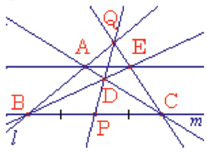
図31

これを既習とすると、次のような方法が考えられる。

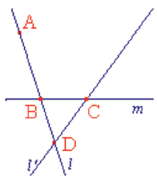
【中線その1】
①点 A を通る任意の直線 l を引き，図のように任意の点P,Q をとる. PC=BP となる点C をとる.



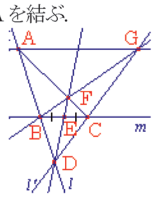
②直線 AC と直線 QP の交点をD とし，直線BD と直線QC の交点E と点A を結ぶ.



【中線その2】
①点A を通る任意の 2 直線 l, l'を引く



②BC の中点をE，AC と直線 DE の交点をF とし，直線 BF と直線 l'の交点 G と点A を結ぶ.



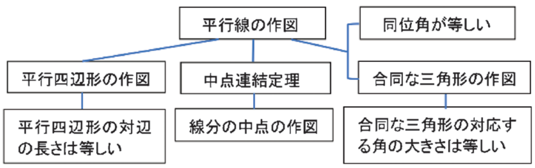
4. 得られた知見

本稿では平行線の作図に着目し、教材を発展的に扱うことによって、多くの既習事項が関連付けられ、多様な解決法を見出すことができることを明らかにした。その過程において、次の知見を得ることができた。

・既習事項を関連付けて見直すという教材の発展的な扱いによって、小学校中学校のそれぞれの学習段階において、どのような平行線の作図が可能になるかが検討でき、こうした発展的な扱いは小中を一貫した算数・数学の教材開発につながることがわかった。

・作図では「任意の」というニュアンスを含んだ一般化された図形の作図が多いため、事前に任意の図形（長方形・正方形・平行四辺形・ひし形・台形）の作図を行っておく必要がある。例えば、任意の3点を設定して、それらを頂点とする平行四辺形を作図するような経験を積んでおくことによって、「定点Aと直線上にとった任意の2点を頂点とする平行四辺形の作図」を「平行線の作図」と関連付けて見出すことができるようになる。また、一般化された図形で作図することができれば、特殊化した図形での作図も検討できる。例えば、作図過程で任意の三角形の作図を想定しているところは、特殊化した二等辺三角形の作図でも成り立つ。多くの場合、特殊化した図形を使った方が作図は簡単になると言える。

・教材を発展的に扱うことによって、既習事項を関連付けて体系化する活動が可能になる。例えば、【平行四辺形その1】【中点連結定理その1】【同位角その1】を見出した子どもは、「平行線の作図」を要にして関連図2のような既習事項の体系化を図ったと言える。



関連図2

こうした体系が発展的につくり出せることを意識させることは、算数・数学の学習活動を「既習事項を活用して多様な解法を見出す活動」として捉えさせることにつながる。これは既習事項の有用性を感得させると同時に、現在蔓延している閉塞的な算数・数学の学習観「1つの解法を覚える活動」からの解放にもつなげられると考えている。

今後も、既習事項の関連の仕方に関する分析を深めるとともに、小中のそれぞれの学習段階に応じて、既習事項を関連付けた体系が発展的につくり出せるような教材開発を行っていきたい。

註

1）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.72
2）算数教科書小 4 上、東京書籍、H28 発行、p.31
3）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、pp.72-73

4）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.80
5）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.81
6）算数教科書小 3 下、啓林館、R2 発行、p.6
7）算数教科書小 4 下、東京書籍、R2 発行、p.22
8）中学校数学教科書 1 年、数研出版、R2 発行、p.142
9）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.72
10）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、pp.72-73
11）算数教科書小 4 下、東京書籍、R2 発行、p.36、表の中の丸は筆者が記入したものである。
12）中学校数学教科書 1 年、東京書籍、H26 発行、p.154
13）中学校数学教科書 1 年、東京書籍、H26 発行、p.160
14）中学校数学教科書 3 年、東京書籍、H26 発行、p.175
15）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.74
16）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.79
17）算数教科書小 4 下、東京書籍、R2 発行、p.34
18）中学校数学教科書 1 年、東京書籍、H26 発行、p.159
19）中学校数学教科書 2 年、大日本書籍、H26 発行、p.167
20）中学校数学教科書 3 年、東京書籍、H26 発行、p.132
21）算数教科書小 4 上、啓林館、R2 発行、p.70
22）算数教科書小 5、啓林館、R2 発行、pp.80-81
23）算数教科書小 5、啓林館、R2 発行、p.132
24）算数教科書小 4 下、東京書籍、R2 発行、pp.26-27
25）中学校数学教科書 2 年、東京書籍、H26 発行、p.136
26）算数教科書小 5 上、東京書籍、R2 発行、p.76
27）中学校数学教科書 2 年、東京書籍、H26 発行、p.97
28）算数教科書小 6、東京書籍、R2 発行、p.97
29）中学校数学教科書 3 年、東京書籍、H26 発行、p.129
30）高等学校数学 A、東京書籍、R2 発行、p.48
31）証明：図 32 において、四角形 NBLC は平行四辺形になるので、NC//BL、BN//LC. よって AP:PB=AN:NL、AQ:QC=AN:NL、ゆえに AP:PB=AQ:QC より PQ//BC.

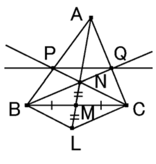


図 32

参考文献

黒木伸明、教員養成の立場から見た小学校教師の数学的リテラシー、日本数学教育学会誌 76-12、pp.2-7、1994 年.

黒木伸明、作図活動による問題設定について、数学教育学会誌 Vol.42/No.1・2、pp.51-58、2001 年.

佐藤康浩・黒木伸明、自由な発想を引き出す数学教材の開発について、数学教育学会研究紀要 Vol.41/No.3・4、pp.39-46，2000 年.

中込雄治・諏訪田文男・黒木伸明、数学的性質の関連づけについて、数学教育学会誌 Vol.44/No.1・2、pp.73-82、2003 年.

中込雄治・黒木伸明・千田真佑子、算数・数学教育におけるテクノロジーの活用場面について、宮城学院女子大学発達科学研究 No.20、pp.7-18、2020 年.